

問題3. ある投資信託の平均収益率を測定するために、この投資信託の月次収益率を n ヶ月間観測し、記録した。この観測標本 x_1, x_2, \dots, x_n は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの独立の標本とし、その母平均を推定することにより平均収益率を推測したい。このとき、次の (1)、(2) について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ選択肢の中から1つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。(20点)

(1) まず、母平均の推定量として、標本の線形結合である線形推定量 T をとりあげ、その中から不偏性、有効性、充足性、一致性を満たす推定量を見つけだすこととする。

標本変量を $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ としたとき、 T は

$$T = \sum_{i=1}^n \omega_i X_i$$

となる。この T が母平均 μ の不偏推定量となるためには、

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = \boxed{\text{①}}$$

を満たす必要がある。さらに、 T の分散は $\sum_{i=1}^n \boxed{\text{②}} \times \sigma^2$ であるので、この不偏推定量の分散

を最小にするためには、

$$\omega_i = \boxed{\text{③}}$$

を満たせばよい。よって、これらの条件を満たす線形推定量 S は、 $\sum_{i=1}^n \boxed{\text{③}} \times X_i$ であることがわかった。

次に、線形推定量 S が有効推定量であるかを調べるために、クラメル・ラオの不等式

$$\boxed{\text{④}} \geq \frac{1}{nE\left\{\left(\frac{\partial \log f(X; \mu)}{\partial \mu}\right)^2\right\}}$$

の下限を満たすかを計算することにした。なお、 $f(x; \mu)$ は母集団分布の確率密度関数である。クラメル・ラオの不等式の右辺は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{nE\left\{\left(\frac{\partial \log f(X; \mu)}{\partial \mu}\right)^2\right\}} &= \frac{1}{nE\left\{\left(\frac{(X - \boxed{\text{⑤}})}{\boxed{\text{⑥}}}\right)^2\right\}} \\ &= \boxed{\text{⑦}} \end{aligned}$$

であり $\boxed{\text{④}}$ と等しくなるため、線形推定量 S はクラメル・ラオの不等式の下限を満たし、有効推定量であることがわかった。