次に、S が充足推定量であるかを調べることにした。正規分布の再生性より、S は平均 $\boxed{\quad ⑧ \quad}$、分散 $\boxed{\quad ⑨ \quad}$ の正規分布に従うことから、S の確率密度関数を $g(t;\mu)$、$t=\sum_{i=1}^{n} \boxed{\quad ③ \quad} \times t_i$ とおくと、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の同時確率密度関数は、

$$\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \times \exp\left\{-\frac{\boxed{\quad ⑩ \quad}}{2\sigma^2}\right\}$$

である。ここで、ある $\hat{s}$ について、

$$\boxed{\quad ⑩ \quad} = n \times \boxed{\quad ⑪ \quad} + 2 \times \boxed{\quad ⑫ \quad} \times \left(\boxed{\quad ⑬ \quad} - n\hat{s}\right) + \boxed{\quad ⑭ \quad}$$

となるので、$\hat{s}$ に t を代入すると、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の同時確率密度関数は、

$$\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\mu) = g(t;\mu) \times \frac{1}{\boxed{\quad ⑮ \quad}} \times \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\boxed{⑯}} \times \exp\left\{-\frac{\boxed{\quad ⑰ \quad}}{2\sigma^2}\right\}$$

となり、S が充足推定量であることがわかった。

最後に、S が一致推定量であるかを調べるために、チェビシェフの不等式

$$\boxed{\quad ⑱ \quad} \le \frac{1}{k^2} \quad (k \text{ は1より大きい任意の定数})$$

から次の不等式を導いた。

$$P\left(|S-E(S)| < \varepsilon\right) \ge \boxed{\quad ⑲ \quad}$$

この不等式の n を十分大きくすれば、

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|S-E(S)| < \varepsilon\right) = \boxed{\quad ⑳ \quad}$$

が成立することから、一致推定量であることがわかった。

（2）（1）で得られた結果を踏まえ、観測された月次収益率から S を計算する2つのプログラム A と B を作成したが、どちらのプログラムも最新の標本 x_n を使用せずに次のように推定量を誤って求めていることがわかった。

プログラム A ：x_1 から x_{n-1} の $n-1$ ヶ月分のデータを使用、すなわち、$\sum_{i=1}^{n} \boxed{\quad ③ \quad} \times X_i$ において n の部分を $n-1$ として推定量を求めた

プログラム B ：x_n の代わりに x_1 を使用、すなわち、$\sum_{i=1}^{n-1} \boxed{\quad ③ \quad} \times X_i + \boxed{\quad ③ \quad} \times X_1$ として推定量を求めた

この2つのプログラムで求めた推定量について、不偏性、有効性、充足性、一致性を満たしているかを調べることとした。まず、不偏性について調べたところ、どちらの推定量も不偏性を満たしていることがわかった。このとき、プログラム A で求めた推定量は $\boxed{\quad ㉑ \quad}$ 推定量であり、プログラム B で求めた推定量は $\boxed{\quad ㉒ \quad}$ 推定量である。